18 Bsp. 18

$$f(x,y) = x^2y^2 - \left(2x^2+3\right)\sin(y) - x\cos(x) + e^y y^5 = 0 \tag{18.1}$$

Die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x\left(\sin(x) + 2y^2 - 4\sin(y)\right) - \cos(x) \tag{18.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - \left(2x^2+3\right)\cos(y) + e^y(y+5)y^4 \tag{18.3}$$

Bildet man das totale Differential von Gleichung (18.1) folgt

$$0 = d(0) = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,. \tag{18.4}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ kann wie folgt (mathematisch nicht rigoros ...) umgeformt werden:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{18.5}$$

Achtung y' ist hier eine Funktion in Abhängigkeit von x und y. Für den gegebenen Punkt $P = (0,0)$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_P = -1 \tag{18.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_P = -3 \tag{18.7}$$

und damit

$$y'|_P = -\frac{-1}{-3} = -\frac{1}{3} \tag{18.8}$$

Für die Tangente gilt (beachte Ausgangspunkt $x_0 = 0$)

$$(Ty)(x) = y|_P + y'|_P(x-x_0) = 0 - \frac{1}{3}(x-0) = -\frac{1}{3}x\,. \tag{18.9}$$

Aus dem Satz über die Implizite Funktion folgt außerdem, dass f lokal um den Punkt P nach $y(x)$ aufgelöst werden kann.
Beachte, dass deswegen keine global gültige Auflösung $y(x)$ geben muss, sondern das nur in einer beliebig kleinen Umgebung um P gelten muss.

19 Bsp. 19

Das Volumen eines Drehkegels ist gegeben durch

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi h r^2 \tag{19.1}$$

und die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi hr}{3} \tag{19.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3}\,. \tag{19.3}$$

a)
Das Volumen, wenn die Messwerte exakt sind ist gegeben durch

$$V(r = 10\,\mathrm{cm}, h = 25\,\mathrm{cm}) = \frac{2500\pi}{3}\,\mathrm{cm}^3 \tag{19.4}$$

b)
Die lineare Näherung des Fehlers ist gegeben durch

$$\Delta V \approx \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| \Delta r + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| \Delta h\,. \tag{19.5}$$

Für die partiellen Ableitungen muss der Punkt eingesetzt werden

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r = 10\,\mathrm{cm}, h = 25\,\mathrm{cm}) = \frac{500\pi}{3} \tag{19.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h}(r = 10\,\mathrm{cm}, h = 25\,\mathrm{cm}) = \frac{100\pi}{3}\,. \tag{19.7}$$

Damit gilt

$$\Delta V \approx \frac{500\pi}{3} 0.1\,\mathrm{cm}^3 + \frac{100\pi}{3} 0.1\,\mathrm{cm}^3 = \frac{60\pi}{3}\,\mathrm{cm}^3 = 20\pi\,\mathrm{cm}^3\,. \tag{19.8}$$

Der relative Fehler (oft von größerem Interesse) kann noch abgeschätzt werden durch

$$\Delta V_r el \approx \frac{\Delta V}{V} = \frac{6}{250} \approx 2.4\,\%\,. \tag{19.9}$$

20 Bsp. 20

Unter den Definitionen $D^{(i,j)} := \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$ und $D^{(0,0)} f := f$ sind die Funktion, ihre Ableitungen + die Auswertung für den Punkt $(1, 2)$

$$
\begin{aligned}
D^{(0,0)} f &= x^3 + xy^2 + y^3 && \to 13 && (20.1)\\
D^{(1,0)} f &= 3x^2 + y^2 && \to 7 && (20.2)\\
D^{(2,0)} f &= 6x && \to 6 && (20.3)\\
D^{(3,0)} f &= 6 && \to 6 && (20.4)\\
D^{(0,1)} f &= y(2x + 3y) && \to 16 && (20.5)\\
D^{(0,2)} f &= 2(x + 3y) && \to 14 && (20.6)\\
D^{(0,3)} f &= 6 && \to 6 && (20.7)\\
D^{(1,1)} f &= 2y && \to 4 && (20.8)\\
D^{(2,1)} f &= 0 && \to 0 && (20.9)\\
D^{(1,2)} f &= 2 && \to 2 && (20.10)
\end{aligned}
$$

Die Taylorreihe im Punkt $(1, 2)$ ist dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&T_3\left(f, (1, 2)\right)(x, y) =\\
&D^{(0,0)} f|_{(1,2)} +\\
&D^{(1,0)} f|_{(1,2)}(x-1)^1(y-2)^0 + D^{(0,1)} f|_{(1,2)}(x-1)^0(y-2)^1 +\\
&\frac{1}{2!} D^{(2,0)} f|_{(1,2)}(x-1)^2(y-2)^0 + D^{(1,1)} f|_{(1,2)}(x-1)^1(y-2)^1 + \frac{1}{2!} D^{(0,2)} f|_{(1,2)}(x-1)^0(y-2)^2 +\\
&\frac{1}{3!} D^{(3,0)} f|_{(1,2)}(x-1)^3(y-2)^0 +\\
&\frac{1}{2!} D^{(2,1)} f|_{(1,2)}(x-1)^2(y-2)^1 + \frac{1}{2!} D^{(1,2)} f|_{(1,2)}(x-1)^1(y-2)^2 +\\
&\frac{1}{3!} D^{(0,3)} f|_{(1,2)}(x-1)^0(y-2)^3 =\\
&13 + 7(x-1) + 16(y-2) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) + 7(y-2)^2 +\\
&(x-1)^3 + (x-1)^1(y-2)^2 + (y-2)^3 =\\
&x^3 + xy^2 + y^3 \qquad (20.11)
\end{aligned}
$$

Beachte, dass die Taylorreihe mit der Funktion übereinstimmt, da f ein Polynom dritten Grades ist.

21 Bsp. 21

Zunächst zerlegen wir den Term in das Produkt zweier Funktionen, deren Potenzreihen wir kennen:

$$\frac{\sin(xy)}{1 + xy} = \sin(xy) \cdot \frac{1}{1 + xy} \qquad (21.1)$$

Die Taylorreihendarstellung des Sinus um 0 lautet

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \,. \tag{21.2}$$

und die der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \tag{21.3}$$

unter der Annahme, dass $|w|< 1$, was angenommen werden kann da wir um den Punkt $(0,0)$ entwickeln und somit eine Umgebung gewählt werden kann mit $|xy|< 1$.
Setzt man für die Reihen ein erhält man

$$\sin(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(xy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = xy - \frac{1}{6}(xy)^3 + \dots \tag{21.4}$$

$$\frac{1}{1+xy} = \frac{1}{1-(-xy)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (xy)^n = 1 - xy + (xy)^2 - (xy)^3 - \dots \tag{21.5}$$

Im Allgemeinen lassen sich die Reihen mittels Cauchy-Produkt multiplizieren. Da hier aber nur P_3 von Interesse ist, können alle höheren Terme ignoriert werden:

$$\begin{aligned}
\sin(xy)\frac{1}{1+xy} &= \left(xy - \frac{1}{6}(xy)^3\right)\left(1 - xy + (xy)^2 - (xy)^3\right) + \dots \\
&= xy - (xy)^2 + (xy)^3 - (xy)^4 - \frac{1}{6}(xy)^3 + \frac{1}{6}(xy)^5 - \frac{1}{6}(xy)^6 + \dots \\
&= xy - (xy)^2 + \frac{5}{6}(xy)^3 + \dots \\
&= (x-0)(y-0) - (x-0)^2(y-0)^2 + \frac{5}{6}(x-0)^3(y-0)^3 + \dots
\end{aligned} \tag{21.6}$$

Wir haben also eine Potenzreihe um $(0,0)$ der Funktion gefunden, die mit der Taylorreihe übereinstimmen muss und somit

$$P_3\left(\frac{\sin(xy)}{1+xy};(0,0)\right)(x,y) = (x-0)(y-0) - (x-0)^2(y-0)^2 + \frac{5}{6}(x-0)^3(y-0)^3 \,. \tag{21.7}$$

22 Bsp. 22

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y \tag{22.1}$$

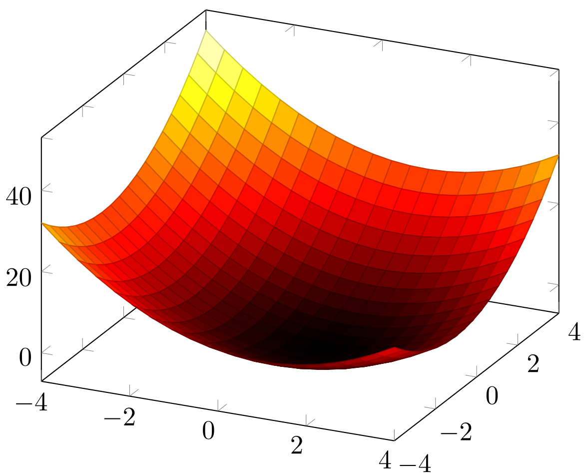

Abbildung 22.1: Skizze: $f(x, y)$

Die Funktion ist zwei mal stetig differenzierbar, deswegen kann man lokale Extrema aus der Taylorreihe ablesen, denn

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f|_{\vec{x}_0} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_f|_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \dots \tag{22.2}$$

alle weiteren Terme können vernachlässigt werden, wenn man nur eine kleine Umgebung betrachtet (und genau das wollen wir bei lokalen Extrema, denn in einer Umgebung um $\vec{x}_0$ muss gelten $f(\vec{x}_0) > f(\vec{x})$ für Maximum, bzw. $f(\vec{x}_0) < f(\vec{x})$ für Minimum).
Verschwindet der Gradient in $\vec{x}_0$ nicht hat die Funktion lokal lineare Anteile und kann die Bedingung nicht erfüllen, deswegen erhalten wir die notwendige Bedingung

$$\nabla f|_{\vec{x}_0} = \vec{0}. \tag{22.3}$$

Ist die Hesse Matrix $H_f|_{\vec{x}_0}$ positiv definit (alle Eigenwerte positiv) gilt

$$(\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_f|_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) > 0 \tag{22.4}$$

und damit ist an $\vec{x}_0$ ein Minimum.
Analog: ist die Hesse Matrix negativ definit, erhalten wir ein Maximum. Ist sie indefinit erhalten wir einen Sattelpunkt.

- Notwendige Bedingung

$$\nabla f|_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{22.5}$$

  Achtung es könnte auch mehr als einen Kandidaten geben.

- Typ bestimmen

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{22.6}$$

Damit

$$H_f|_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{22.7}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_{1,2}(H_f|_{\vec{x}_0}) = 2 \tag{22.8}$$

Damit ist die Hesse Matrix in $\vec{x}_0$ positiv definit und es liegt ein lokales Minimum vor.

23 Bsp. 23

$$f(x,y) = x^3 y + 12x^2 - 8y \tag{23.1}$$

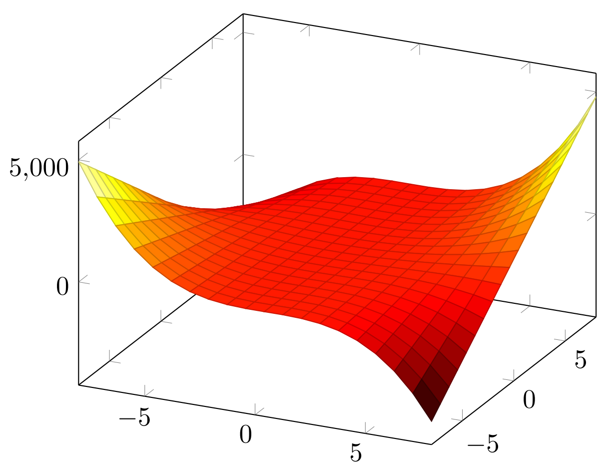

Abbildung 23.1: Skizze: $f(x,y)$

- Notwendige Bedingung

$$\nabla f|_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3x(xy+8) \\ x^3 - 8 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \tag{23.2}$$

Aus der zweiten zeile folgt $x = 2$ und damit aus der ersten $y = -4$, d.h. es gibt einen Kandidaten

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{23.3}$$

- Typ bestimmen

$$H_f = \begin{pmatrix} 6xy + 24 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{23.4}$$

Damit

$$H_f|_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} 72 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \tag{23.5}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_1 = 12\left(3 + \sqrt{10}\right) > 0 \tag{23.6}$$

$$\lambda_1 = 12\left(3 - \sqrt{10}\right) < 0 \tag{23.7}$$

Damit ist die Hesse Matrix in $\vec{x}_0$ indefinit und es liegt ein Sattelpunkt vor.

24 Bsp. 24

$$f(x,y) = xy^2 \quad D = \left\{(x,y)\,|\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 3\right\} \tag{24.1}$$

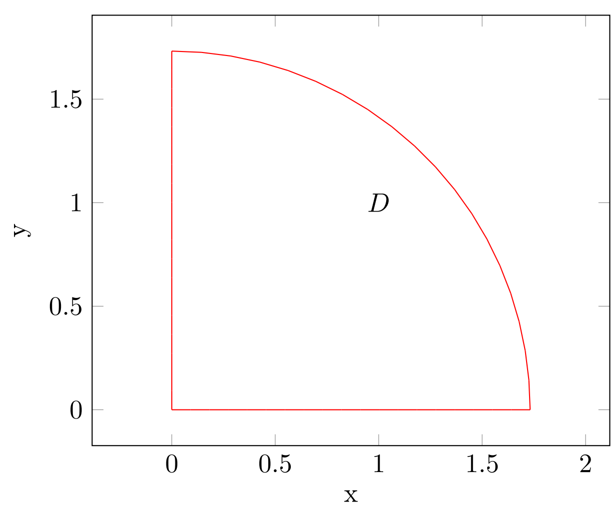

Abbildung 24.1: Schema: Definitionsbereich

Lokale Extrema

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad \vec{x_0} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \tag{24.2}$$

also gibt es kein lokales Extremum (jedoch ist jeder Punkt auf dieser gerade ein Kandidat für ein gloables Extremum). Auf dieser Geraden gilt $f(\vec{x_0}) = 0$.

Randextrema
Kandidaten sind lokale Extrema am Rand und Eckpunkte jeder Parametrisierung:

$$\gamma_1(t) = \sqrt{3}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} \qquad t \in [0, \pi/2] \tag{24.3}$$

$$\gamma_2(t) = \sqrt{3}\begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix} \qquad t \in [0, 1] \tag{24.4}$$

$$\gamma_3(t) = \sqrt{3}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix} \qquad t \in [0, 1] \tag{24.5}$$

Eigesetzt in die Funktion

-
$$\tilde{f}_1(t) := f(\gamma_1(t)) = 3\sqrt{3}\cos(t)\sin^2(t) \tag{24.6}$$

$$\dot{\tilde{f}}_1(t) = -3\sqrt{3}\sin(t)\left(\sin^2(t) - 2\cos^2(t)\right) \tag{24.7}$$

  Auf $(0, \pi/2)$ wird $\sin(t)$ nicht Null, da $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, betrachten wir noch

$$0 \stackrel{!}{=} 1 - 3\cos^2(t) \tag{24.8}$$

  Da $\cos(t) > 0$ auf dem betrachteten Intervall gilt

$$\cos(t) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow t = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \frac{\pi}{2} \tag{24.9}$$

  An diesem Punkt gilt

$$f\left(\gamma_1\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) = 2 \tag{24.10}$$

-
$$\tilde{f}_2(t) := f(\gamma_2(t)) = 0 \tag{24.11}$$

$$\tag{24.12}$$

  Keine lokalen Extrema.

-
$$\tilde{f}_3(t) := f(\gamma_3(t)) = 0 \tag{24.13}$$

$$\tag{24.14}$$

  Keine lokalen Extrema.

- Randpunkte der Parametrisierungen:

$$f(0, 0) = 0 \tag{24.15}$$

$$f(\sqrt{3}, 0) = 0 \tag{24.16}$$

$$f(0, \sqrt{3}) = 0 \tag{24.17}$$

Betrachtet man alle Kandidaten folgt

- Gloables Maximum: 2
- Globales Minimum: 0

25 Bsp. 25

$$f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y \quad D = \left\{(x,y) \,|\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq 7\right\} \tag{25.1}$$

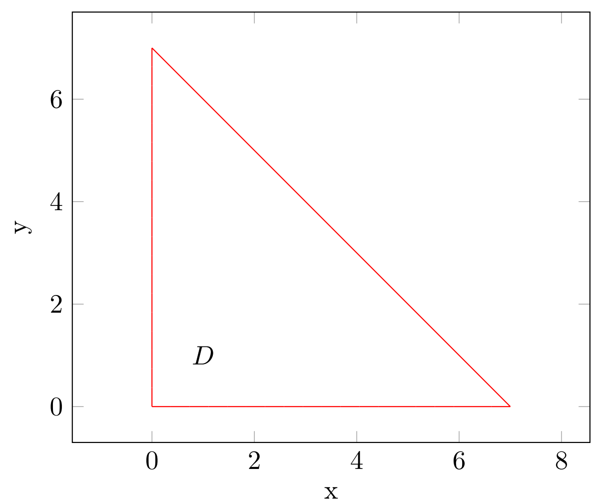

Abbildung 25.1: Schema: Definitionsbereich

Nullsetzen des Gradienten

$$\vec{0} \stackrel{!}{=} \nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-3) \\ 2(y-2) \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{25.2}$$

und berechnen der Hesse Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{25.3}$$

welche offensichtlich immer positiv definit ist. Daher ist in $\vec{x}_0$ ein Minimum mit Wert (ebenfalls Kandiat für gloables Minimum)

$$f(3,2) = -13 \tag{25.4}$$

Randextrema
Kandidaten sind lokale Extrema am Rand und Eckpunkte jeder Parametrisierung:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 7-t \end{pmatrix} \quad t \in [0,7] \tag{25.5}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0,7] \tag{25.6}$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0,7] \tag{25.7}$$

Eigesetzt in die Funktion

- $$\tilde{f}_1(t) := f(\gamma_1(t)) = t^2 - 6t + (7-t)^2 - 4(7-t) = 2t^2 - 16t + 21 \tag{25.8}$$

  $$0 \overset{!}{=} \dot{\tilde{f}}_1(t) = 4t - 16 \implies t = 4 \tag{25.9}$$

  wobei bei $t = 4$ ein Minimum sein muss, da $\tilde{f}_1$ eine Parabel mit positivem Vorzeichen ist. D.h. wir haben den Kandidaten für ein Globales Minimum

  $$\vec{x}_0 = \gamma_1(t=4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{25.10}$$

  mit dem Wert

  $$\tilde{f}_1(t=4) = -11 \tag{25.11}$$

- $$\tilde{f}_2(t) := f(\gamma_2(t)) = t^2 - 6t = (t-3)^2 - 9 \tag{25.12}$$

  $$\tag{25.13}$$

  auch eine Parabel mit Minimalwert -9. Was als Kandidat für ein Minimum schon rausfällt da der Wert größer ist als $-11 \longrightarrow$ keine weitere Untersuchung nötig.

- $$\tilde{f}_3(t) := f(\gamma_3(t)) = (7-t)^2 - 4(7-t) = (t-5)^2 - 4 \tag{25.14}$$

  $$\tag{25.15}$$

  auch eine Parabel mit Minimalwert -4. Was als Kandidat für ein Minimum schon rausfällt da der Wert größer ist als $-11 \longrightarrow$ keine weitere Untersuchung nötig.

- Randpunkte der Parametrisierungen:

  $$f(0,0) = 0 \tag{25.16}$$

  $$f(7,0) = 7 \tag{25.17}$$

  $$f(0,7) = 21 \tag{25.18}$$

Betrachtet man alle Kandidaten folgt

- Gloables Maximum: 21
- Globales Minimum: -13

26 Bsp. 26

$$f(x,y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x} \tag{26.1}$$

Die Funktion hat offensichtlich keine globalen Extrema da für $y = 1$ $x \to 0$ folgt $f \to -\infty$ und für $x = -1$ und $y \to -\infty$ folgt $f \to \infty$.
Damit bleiben noch lokale Extrema

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{-2x^3+x+y}{x^2} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \tag{26.2}$$

Aus der zweiten Zeile folgt $x = y$, was in die erste Zeile eingesetzt ergibt ($x \neq 0$, da sonst f nicht definiert)

$$-2x^3 + 2x \stackrel{!}{=} 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1 \tag{26.3}$$

Die Hessematrix ist gegeben durch

$$H_f = \begin{pmatrix} -\frac{2y}{x^3} - \frac{1}{x^2} - 2 & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \tag{26.4}$$

Eingesetzt für die Punkte

$$H_f(x = y = 1) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -3 - \sqrt{5} < 0\, \lambda_2 = \sqrt{5} - 3 < 0 \tag{26.5}$$

d.h. für $x = y = 1$ liegt ein lokales Maximum vor.

$$H_f(x = y = -1) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -3 - \sqrt{5} < 0\, \lambda_2 = \sqrt{5} - 3 < 0 \tag{26.6}$$

d.h. für $x = y = -1$ liegt ebenfalls ein lokales Maximum vor.

27 Bsp. 27

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \,\textbf{NB:}\, x^2 + xy + y^2 = 3 \tag{27.1}$$

Wir verwednden die Methode nach Lagrange. Dazu ist die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3) \tag{27.2}$$

Die Kandidaten für lokale Extrema bestimmen wir indem wir ihre Ableitungen Null setzen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{x} = 2x - \lambda(2x + y) \stackrel{!}{=} 0 \tag{27.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{y} = 2y - \lambda(2y + x) \stackrel{!}{=} 0 \tag{27.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda} = x^2 + xy + y^2 - 3 \stackrel{!}{=} 0 \tag{27.5}$$

$$\tag{27.6}$$

Aus Zeile 1 folgt

$$x = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)} y \tag{27.7}$$

(beachte: bei der Division darf $\lambda \neq 1$, was aber zu $x = y = 0$ in den ersten zwei Gleichungen führen würde, was aber keine Lösung der dritten Gleichung ist und deswegen nicht weiter beachtet werden muss). eingesetzt in die zweite Zeile

$$0 = 2y(1-\lambda) - \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda)} y = \frac{(2-\lambda)(3\lambda-2)y}{2(\lambda-1)} \tag{27.8}$$

Also entweder $y = 0$ woraus $x = 0$ folgt, also ein Widerspruch zu Gleichung 3) oder

$$\lambda = 2 \quad \vee \quad \lambda = \frac{2}{3} \tag{27.9}$$

- $\lambda = 2$
  Dafür gilt (einsetzen in vorherige Gleichungen)

  $$x = -y \tag{27.10}$$

  Eingesetzt in die dritte Lagrange Gleichung

  $$0 = x^2 + xy + y^2 - 3 = x^2 - x^2 + x^2 - 3 = x^2 - 3 \tag{27.11}$$

  Also $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $y = \mp\sqrt{3}$. Also erhalten wir die Kandidaten und zugehörige Funktionswerte

  $$(+\sqrt{3}\,,\, -\sqrt{3}) \longrightarrow 6 \tag{27.12}$$
  $$(-\sqrt{3}\,,\, +\sqrt{3}) \longrightarrow 6 \tag{27.13}$$

- $\lambda = \frac{2}{3}$
  analog

  $$x = y \tag{27.14}$$

  Eingesetzt in die dritte Lagrange Gleichung

  $$0 = x^2 + xy + y^2 - 3 = 3x^2 - 3 \tag{27.15}$$

  Also $x = \pm 1$ und $y = \pm 1$. Also erhalten wir die Kandidaten und zugehörige Funktionswerte

  $$(+1\,,\, +1) \longrightarrow 2 \tag{27.16}$$
  $$(-1\,,\, -1) \longrightarrow 2 \tag{27.17}$$

Die Typbestimmung ist bei Lagrange sehr aufwendig, wir können aber die Werte bestimmen

- Maximum: 6
- Minimum: 2

28 Bsp. 28

Der Punkt der von einer Geraden den geringsten Abstand hat muss immer normal zur Geraden liegen, d.h

$$\vec{q} = \vec{p} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{28.1}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$, welches wir minimieren wollen. Schneidet man die Parabel (parametrisiert über u) und die Gerade (parametrisiert über t erhält) man

$$\begin{pmatrix} u^2 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t/2 + 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{28.2}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$t = 2u + -4\lambda - 4 \tag{28.3}$$

und damit aus der ersten

$$u^2 = 2u + -5\lambda - 4 \tag{28.4}$$

was wir nach λ auflösen können

$$\lambda = \lambda(u) = \frac{1}{5}\left(-u^2 + 2u - 4\right) \tag{28.5}$$

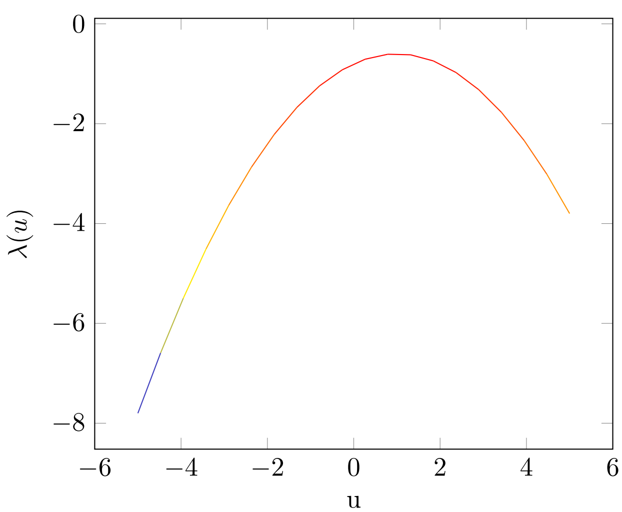

Abbildung 28.1: Skizze: $\lambda(u)$

eine Parabel mit negativem Vorzeichen, deren lokales Maximum wir über Nullsetzen der Ableitung bestimmen. Wir sind am Absolutbetrag von interessiert und die Parabel liegt ganz in der unteren Halbebene, deswegen ist das lokale Maximum der Wert von λ, der den geringsten Abstand zur ergibt. Dazu setzen wir die Ableitung null:

$$\lambda(u) = \frac{-2}{5}(u-1) \stackrel{!}{=} 0 \longrightarrow u = 1 \tag{28.6}$$

woraus $\lambda(u) = -\frac{3}{5}$ folgt und damit $t = 2 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{-3}{5} - 4 = \frac{2}{5}$. Damit erhalten wir die Punkte mit Minimalabstand

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{28.7}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{28.8}$$

29 Bsp. 29

$$f(x,y) = 3x - 4y\, \textbf{NB:}\ x^2 + y^2 = 25 \tag{29.1}$$

Die Nebenbedingung ist ein Kreis mit Radius 5, d.h. Parametrisierung

$$\gamma(t) = 5\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi) \tag{29.2}$$

eingesetzt in die Funktion

$$\tilde{f}(t) = f\left(\gamma(t)\right) = 15\cos(t) - 20\sin(t) \tag{29.3}$$

$$\dot{\tilde{f}}(t) = -15\sin(t) - 20\cos(t) \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \tan(t) = -\frac{4}{3} \tag{29.4}$$

also

$$t = \pi n - \arctan\left(\frac{4}{3}\right), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{29.5}$$

Dafür sind die Werte die in dem Intervall der Parametrisierung liegen

$$t = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \tag{29.6}$$

$$t = 2\pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \tag{29.7}$$

Den Typ bestimmen wir über die zweite Ableitung

$$\ddot{\tilde{f}}(t) = -15\cos(t) + 20\sin(t) \tag{29.8}$$

$$\ddot{\tilde{f}}(t = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)) = 25 > 0 \longrightarrow \textbf{Minimum} \tag{29.9}$$

$$\ddot{\tilde{f}}(t = 2\pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)) = -25 < 0 \longrightarrow \textbf{Maximum} \tag{29.10}$$

30 Bsp 30

Minimierungsproblem

$$\textbf{minimiere: } x+y+z \quad \textbf{NB: } xyz = 24 \tag{30.1}$$

wobei zusätzlich alle Variablen positiv sein sollen.
Zunächst drücken wir eine Variable aus der Nebenbedingung aus um eine zu minimierende Funktion ohne NB zu erhalten

$$f(x,y) = x+y+z(x,y) = x+y+\frac{24}{xy} \tag{30.2}$$

setzen den Gradienten Null

$$\vec{0} \overset{!}{=} \nabla f = \begin{pmatrix} 1-\frac{24}{x^2y} \\ 1-\frac{24}{xy^2} \end{pmatrix} \tag{30.3}$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$y = \frac{24}{x^2} \tag{30.4}$$

eingesetzt in die zweite

$$0 = 1-\frac{24}{xy^2} = 1-\frac{x^3}{24} \longrightarrow x = \sqrt[3]{24} \tag{30.5}$$

Woraus aus den anderen Gleichungen folgt

$$y = z = \sqrt[3]{24} \tag{30.6}$$

was aufgrund der Symmetrie des Problems und der Nebenbedinung zu erwarten war.

31 Bsp. 31

Wir minimieren das Abstandsquadrat (damit wird auch der Abstand minimal, aber die Ableitungen sind einfacher). Wir erhalten das Minimierungsproblem

$$\textbf{minimieren}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \quad \textbf{NB: } 2x-y+z = 2 \tag{31.1}$$

Aus der Nebenbedinung drücken wir eine Variable aus (z.b. z) und erhalten

$$z = 2-2x+y \tag{31.2}$$

Damit minimieren wir die Funktion ohne Nebenbedingung

$$f(x,y) = (x-1)^2+(y-2)^2+(2-2x+y-3)^2 = 5x^2-4xy+2x+2y^2-6y+6 \tag{31.3}$$

deren Gradienten wir Null setzen

$$\vec{0} \overset{!}{=} \nabla f = \begin{pmatrix} 10x-4y+2 \\ -4x+4y-6 \end{pmatrix} \tag{31.4}$$

Damit erhalten wir den Kandidaten

$$\vec{x}_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{31.5}$$

Die Hessematrix ist

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \tag{31.6}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_1 = 12\,,\ \lambda_2 = 2 \tag{31.7}$$

also ein Minimum. Jetzt müssen wir noch den z-Wert berechnen

$$z = 2 - 2x + y = 2 - \frac{4}{3} + \frac{13}{6} = \frac{17}{6} \tag{31.8}$$

und damit ist der Punkt mit geringstem Abstand

$$\vec{p}_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} \tag{31.9}$$

32 Bsp. 32

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ u\tan(v) \\ 1 - e^{-v} \end{pmatrix} \tag{32.1}$$

Zunächst bestimmen wir u und v für den Punkt P

$$\begin{pmatrix} u \\ u\tan(v) \\ 1 - e^{-v} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 - e^{-\pi/4} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \tag{32.2}$$

Als nächstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen und ihren Wert im Punkt $\vec{u}_0$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(v) \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{v}_1 \tag{32.3}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ u(1 + \tan^2(v)) \\ e^{-v} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ e^{-\pi/4} \end{pmatrix} =: \vec{v}_2 \tag{32.4}$$

Die Tangentialebene ist gegeben durch

$$e(t, s) = P + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 \quad t, s \in \mathbb{R} \tag{32.5}$$

und die Normal durch

$$g(t) = P + t\vec{n}, \tag{32.6}$$

wobei

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \tag{32.7}$$

33 Bsp. 33

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} uv + vw + wu \\ \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ \frac{w}{u} + \frac{u}{v} + \frac{v}{w} \end{pmatrix} \tag{33.1}$$

wir verwenden den Satz über die implizite Funktion und müssen dafür die Jacobi Matrix in dem Punkt ausrechnen

$$J_f(u, v, w) = \begin{pmatrix} v + w & u + w & v + u \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} & \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \\ -\frac{w}{u^2} + \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} + \frac{1}{w} & -\frac{v}{w^2} + \frac{1}{u} \end{pmatrix} \tag{33.2}$$

$$J_f(2, 3, 6) = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \tag{33.3}$$

deren Determinante nicht verschwinden darf damit die Funktion lokal invertierbar ist.

$$\det\big(J_f(2, 3, 6)\big) = -\frac{1133}{252} \neq 0 \tag{33.4}$$

also ist die Koordinatentransformation lokal invertierbar.